

# Dépendances spatio-temporelles de la résistance des matériaux. Modélisation pour une prise en compte systématique en contexte de calcul non linéaire



Université  
de Toulouse



Sellier Alain<sup>1</sup>, Millard Alain<sup>2</sup>



Recherche financée par l'ANR et le RGCU  
Projets CEOS.fr et ANR MEFISTO

**MEFISTO**

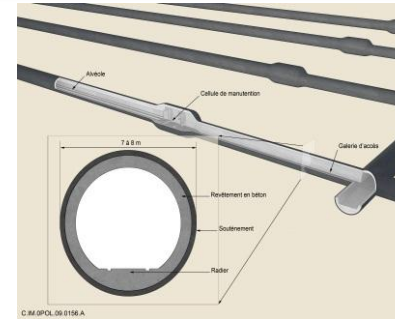
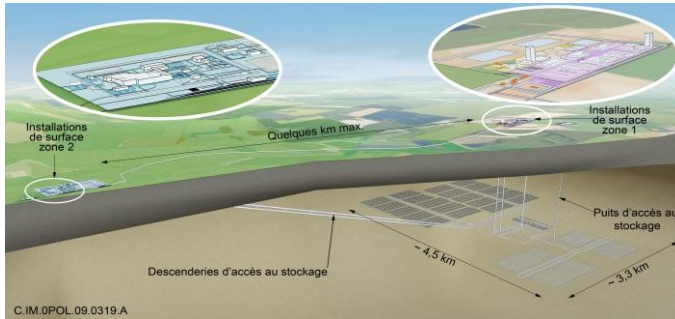


<sup>1</sup> [alain.sellier@insa-toulouse.fr](mailto:alain.sellier@insa-toulouse.fr) ; Université de Toulouse ; UPS, INSA ; LMDC (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) ; 135, avenue de Rangueil; F-31 077 Toulouse Cedex 04, France.

<sup>2</sup> [alain.millard@cea.fr](mailto:alain.millard@cea.fr); Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives ; CEA, DEN, DANS, DM2S, SEMT, LM2S, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay ; F-91 191 Gif-Sur-Yvette, France.

Contexte:

Estimation du risque de fissuration dans les grandes structures de génie civil



Problèmes à résoudre pour les grandes structures:

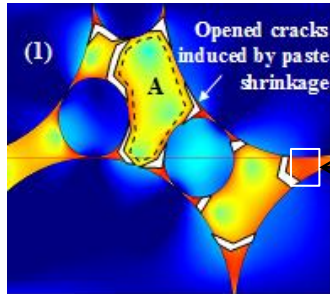
Comment considérer simultanément et automatiquement lors d'une analyse aux éléments finis

- L'effet d'échelle déterministe (problème énergétique)
- L'effet d'échelle probabiliste (problème du maillon faible)

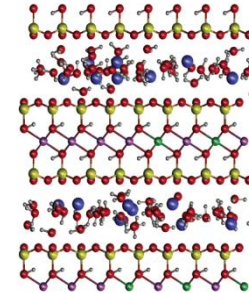
L'origine des des effets d'échelle probabilistes dans le béton

Aléas spatial généré par le retrait différentiel pâte –granulat au jeune âge

Aléas temporel généré la dynamique moléculaire au niveau des liaison inter-feuillets des C-S-H



Sellier et al SCS 2012



Why Clays Swell

Emiel J. M. Hensen<sup>\*,†</sup> and Berend Smit

J. Phys. Chem. B 2002, 106, 12664–12667

La probabilité d'avoir un défaut de taille importante augmente avec le volume chargé (Weibull)

La probabilité de passer par une énergie de liaison faible augmente avec le temps de chargement (Probabilité de transition)

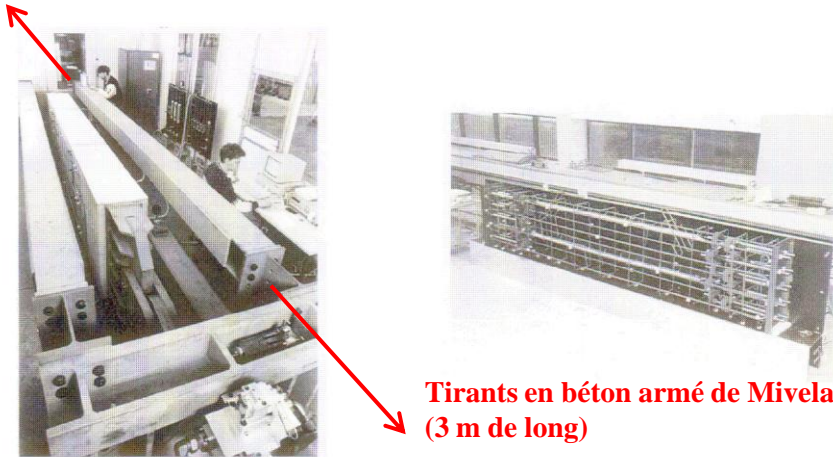
Effet d'échelle probabiliste spatial : Dépendance de R au volume chargé

Effet d'échelle probabiliste temporel Dépendance de R à la durée de chargement

Effet d'échelle probabiliste spatio-temporel

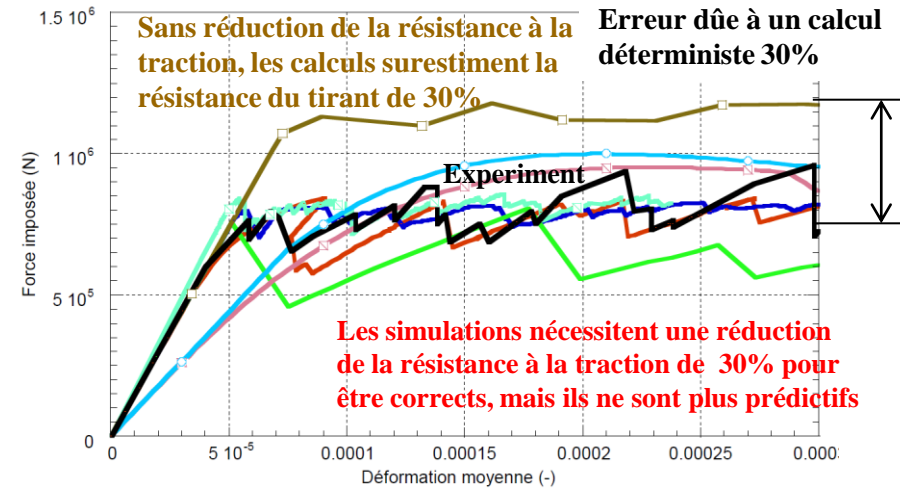
Les conséquences des effets d'échelle probabilistes

Les paramètres matériaux issus des essais à l'échelle des éprouvettes du laboratoire (essai de fendage par exemple) ne sont pas directement utilisables pour prédire le comportement à l'échelle d'une grande structure



Tirants en béton armé de Mivelaz (3 m de long)

Figure 1. Dispositif expérimental pour le tirant en traction (Mivelaz, 1996)



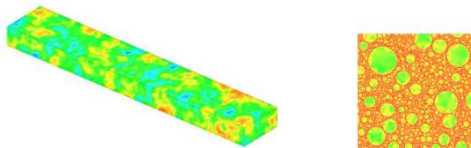
Les tirages aléatoires expliquent le phénomène mais :

- Si le champ aléatoire est trop faible l'effet d'échelle aléatoire est sous estimé

- Si l'amplitude du champ aléatoire est correct, un grand nombre de simulations est nécessaire pour accéder à la réponse la plus vraisemblable de la structure...

- Le cout des calculs est alors trop important, la question est alors : est il possible de considérer l'effet d'échelle aléatoire sans recourir aux simulations de Monte Carlo ?

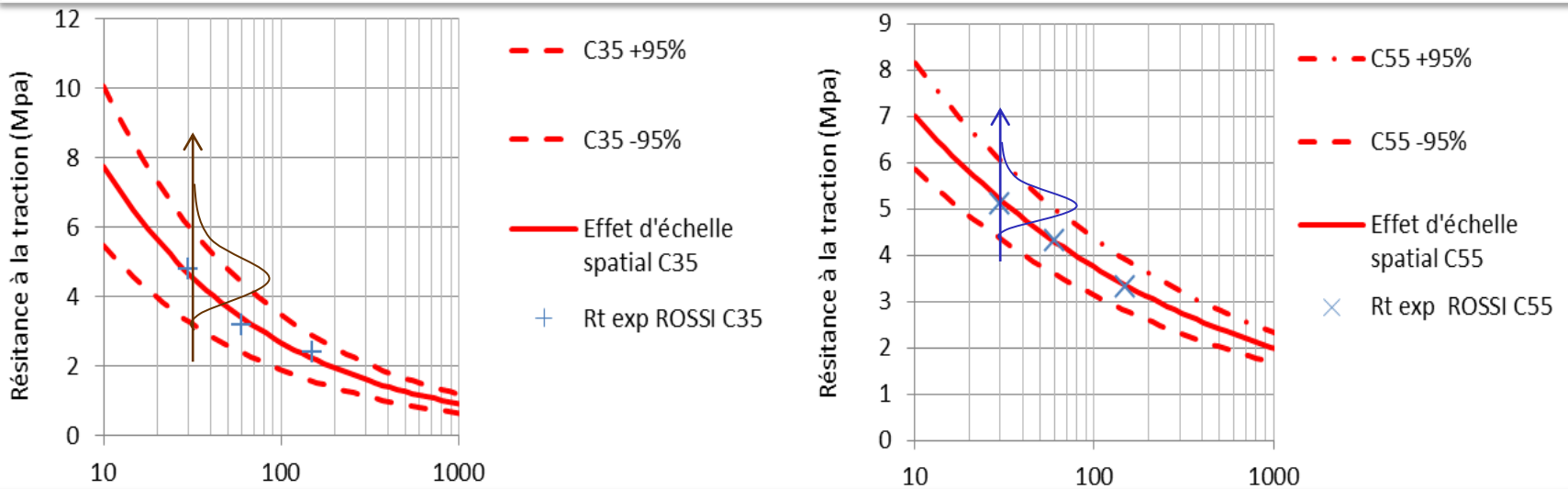
- L'écart est expliquée par l'aléas spatial du matériau qui doit être considéré
- Les méthodes actuelles consistent à utiliser des simulations de Monte Carlo avec
  - champ aléatoire ou
  - méso-structure aléatoire



(Laborderie et al 2009)



### Caractérisation expérimentale de l'effet d'échelle aléatoire spatial

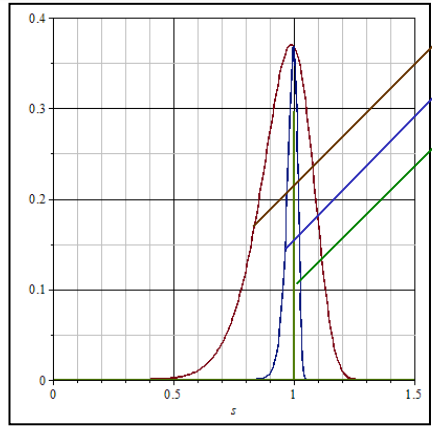


Lors d'essais de traction, la résistance à la traction d'un béton décroît de 50% lorsque le volume sollicité est multiplié par 10

### La théorie de Weibull permet de relier la dispersion au niveau local et l'effet d'échelle probabiliste

Distribution de Weibull à l'échelle d'un échantillon

$$Pf_e = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma(x)}{\lambda_{Rt/e}}\right)^m\right)$$



$m=10$   $m=48$   $m=1e4$  **Théorie du maillon faible**

$$P_{Vref}^s(M, t) = \prod_{d\tau \in [0, t]} (P_{Vref, tref}^s(M, \tau))^{d\tau}$$

**Effet d'échelle de Weibull**

$$\frac{R_{Veq}}{R_{Vref, teq}} = \left(\frac{V_{ref}}{V_{eq}}\right)^{1/m}$$

L'exposant  $m$  caractérise le coefficient de variation à l'échelle de l'échantillon et intervient dans la loi d'effet d'échelle de Weibull; la loi d'effet d'échelle nécessite la connaissance du volume chargé « équivalent »  $V_{eq}$

## Les limites de la théorie originale de Weibull

La théorie originelle de Weibull est “unidirectionnelle”, elle fonctionne très bien pour une chaîne... ☺

$$1 - P_V^f(M, t) = \prod_{dV \in V} \left(1 - P_{Vref}^f(M, t)\right)^{\left(\frac{dV}{Vref}\right)}$$



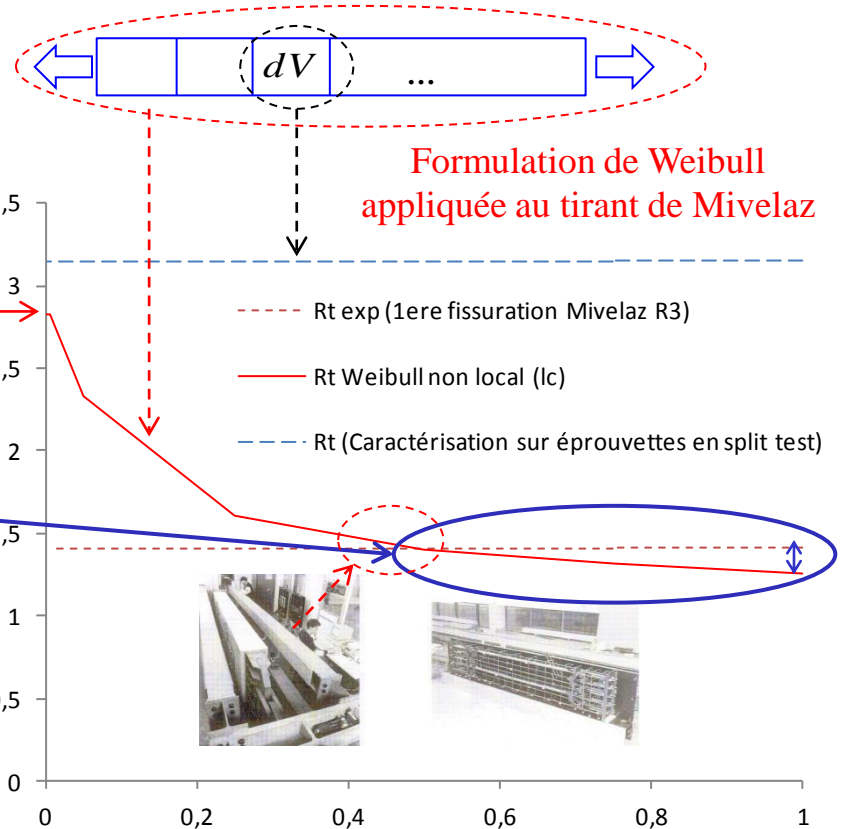
$$\ln(1 - Pf_v) = \int_V \frac{\ln(1 - Pf_e)}{V_e} dV$$

Mais la généralisation aux structures tridimensionnelles conduit à une sous estimation de la résistance... ☹



Le défaut le plus important est surestimé par l'intégrale de Weibull, en raison:

- du contrôle de qualité des matériaux
- de la taille maximale des granulats qui contrôle le plus gros défaut



Longueur du tirant considérée dans l'intégrale de Weibull

- La taille maximale du plus gros défaut croît statistiquement avec le volume chargé jusqu'à une certaine limite correspondant au volume maximal à considérer dans l'intégrale de Weibull -> L'extrapolation de la loi de Weibull au-delà le volume d'intégration maximal conduit à une sous estimation de la résistance...

**Comment limiter le domaine d'intégration de l'intégrale de Weibull en contexte éléments finis ?**

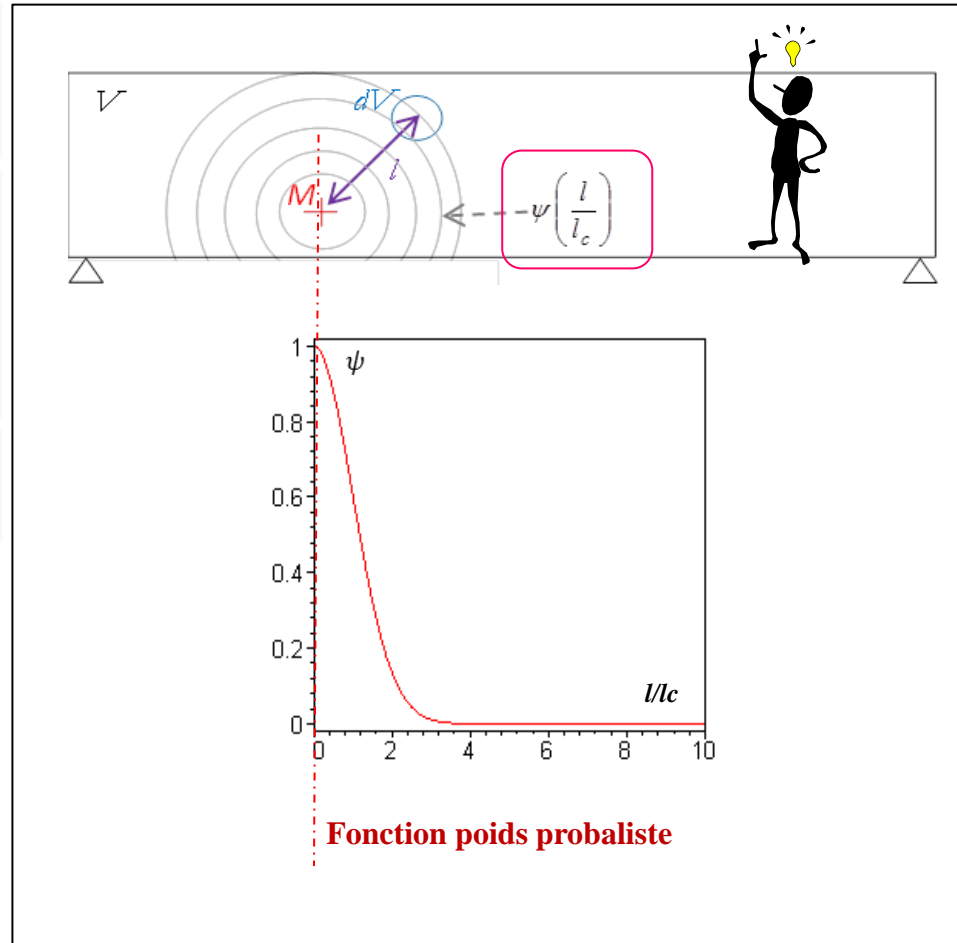
Pour chaque point de la structure, seuls les points voisins (sur une zone suffisamment large) devraient être considérés

Ceci peut être réalisé grâce à une fonction poids qui efface l'influence des points lointains d'un point d'intérêt donné (analogue à celle utilisée dans les méthodes de régularisation énergétique non locales)

On propose d'utiliser une fonction poids dans l'intégrale de Weibull

$$P_V^s(M, t) = \prod_{dV \in V} \left( P_{Vref}^s(M, t) \right)^{\left( \psi_M \left( \frac{l}{l_c} \right) \frac{dV}{V_{ref}} \right)}$$

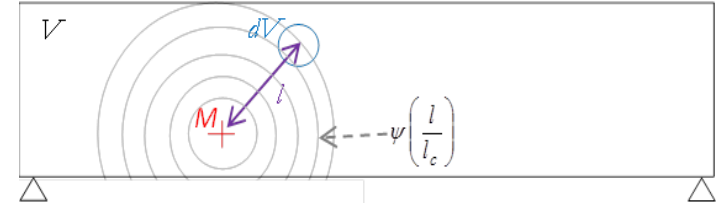
$$\ln(1 - Pf_{V/A}) = \int_V \frac{\ln(1 - Pf_e)}{V_e} \psi(l/l_c) dV$$



L'intégrale de Weibull devient une intégrale non locale avec une longueur caractéristique "lc"

### Champ de résistance à la traction le plus vraisemblable

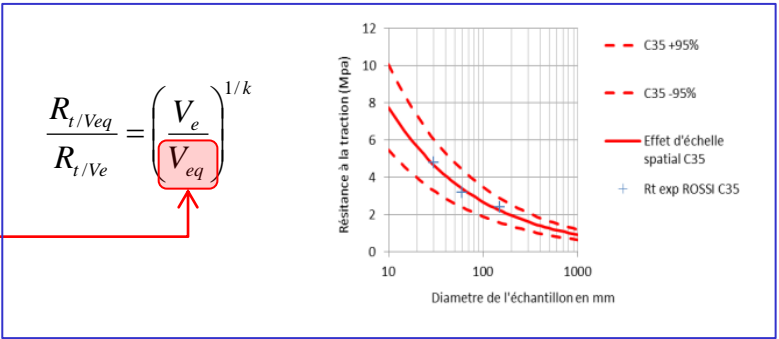
Pour connaître la résistance en un point donné, un volume équivalent doit être calculé pour être utilisé dans la loi d'effet d'échelle,



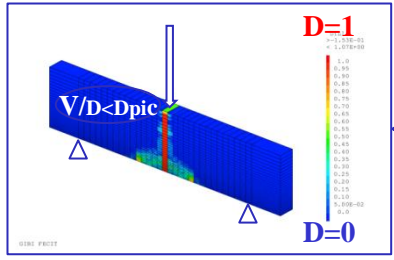
Volume chargé équivalent  $V_{eq}/A$

$$\frac{V_{eq}}{V_e} \ln(1 - Pf_{Vref}) = \ln(1 - Pf_V) = \int \frac{\ln(1 - Pf_e)}{V_e} \psi(l/lc) dV$$

$V/D < D_{pic}$



$$\frac{R_t/V_{eq}}{R_t/V_e} = \left( \frac{V_e}{V_{eq}} \right)^{1/k}$$



Une attention doit être portée au fait que l'intégrale de Weibull ne concerne que la zone non encore macro fissurée ( $D < D_{pic}$ )



**Implémentation optimisée de la méthode : formulation différentielle simplifiée pour une résolution rapide du pb non-local**

$$\ln(1 - Pf_{V/A}) = \int_V \frac{\ln(1 - Pf_e)}{V_e} \psi(l/l_c) dV = \ln(1 - Pf_e) \frac{V_{eq/A}}{V_e} = \alpha(A)$$

Pb non local à résoudre

Fonction poids Gaussienne

$$\left(\frac{\sigma_A}{R_{t/Ve}}\right)^m V_{eq(A)} = \int_V \left(\frac{\sigma}{R_{t/Ve}}\right)^m \psi(l/l_c) dV$$



$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{l}{l_c}\right)^2\right)$$



L'intégrale de Weibull non-locale peut être remplacée par une équation différentielle d'Helmholtz, de résolution très rapide

$$\alpha(A) - \left(\frac{lc^2}{2}\right) \Delta \alpha(A) = V_{max} \cdot \left(\frac{\sigma(A)}{R_{t/Ve}}\right)^m$$



$$\overline{K\alpha} = \overline{F}$$

Implementation éléments finis : système linéaire à résoudre à chaque sous itération pour avoir  $\alpha$

$\alpha$  est issu d'un étape de résolution non locale

$$\overline{\alpha} = \overline{K}^{-1} \overline{F}$$

$$V_{eq(A)} = \frac{\alpha(A)}{\left(\frac{\sigma_A}{R_{t/Ve}}\right)^m} \leq V_{max}$$

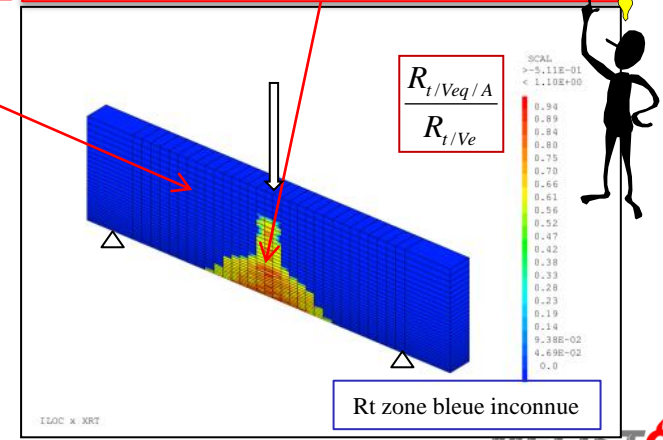
Le volume chargé équivalent est déduit de  $\alpha$

$$\frac{R_{t/Veq/A}}{R_{t/Ve}} = \left(\frac{V_e}{V_{eq/A}}\right)^{1/m}$$

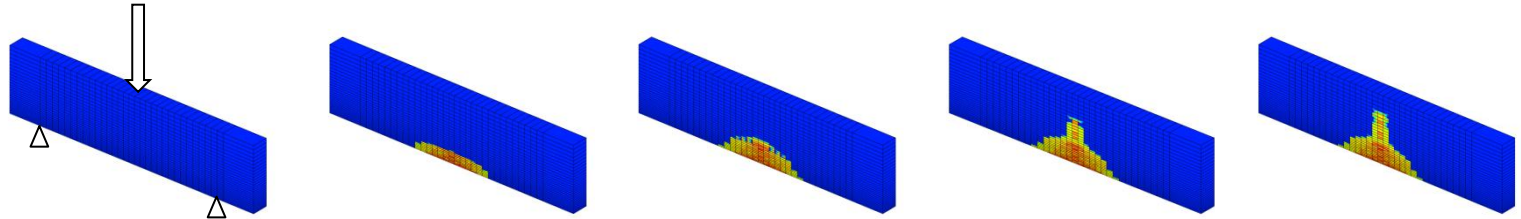
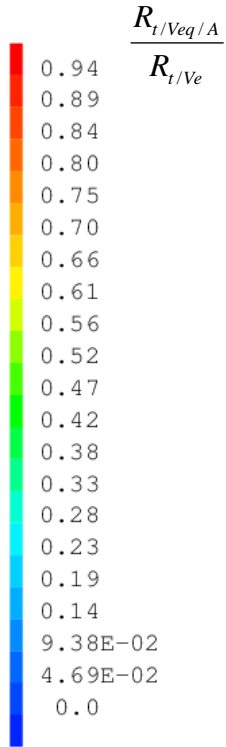
On en déduit la résistance la plus vraisemblable à utiliser à chaque pas

Rt est réévalué à chaque itération pour les zones non endommagées

Rt n'est conservée que pour les zones endommagées

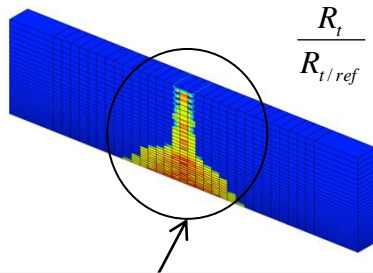


Exemple : Poutre non entaillée de Syroka-Korol (2013)

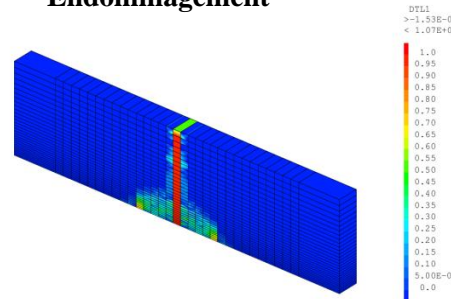


- Au début du calcul la résistance est inconnue
- La résistance à la traction est déterminée progressivement,
- elle augmente avec la réduction du volume chargé

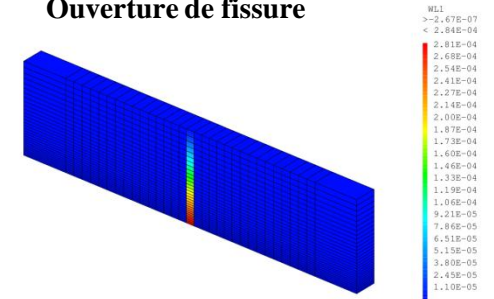
Rt la plus vraisemblable



Endommagement



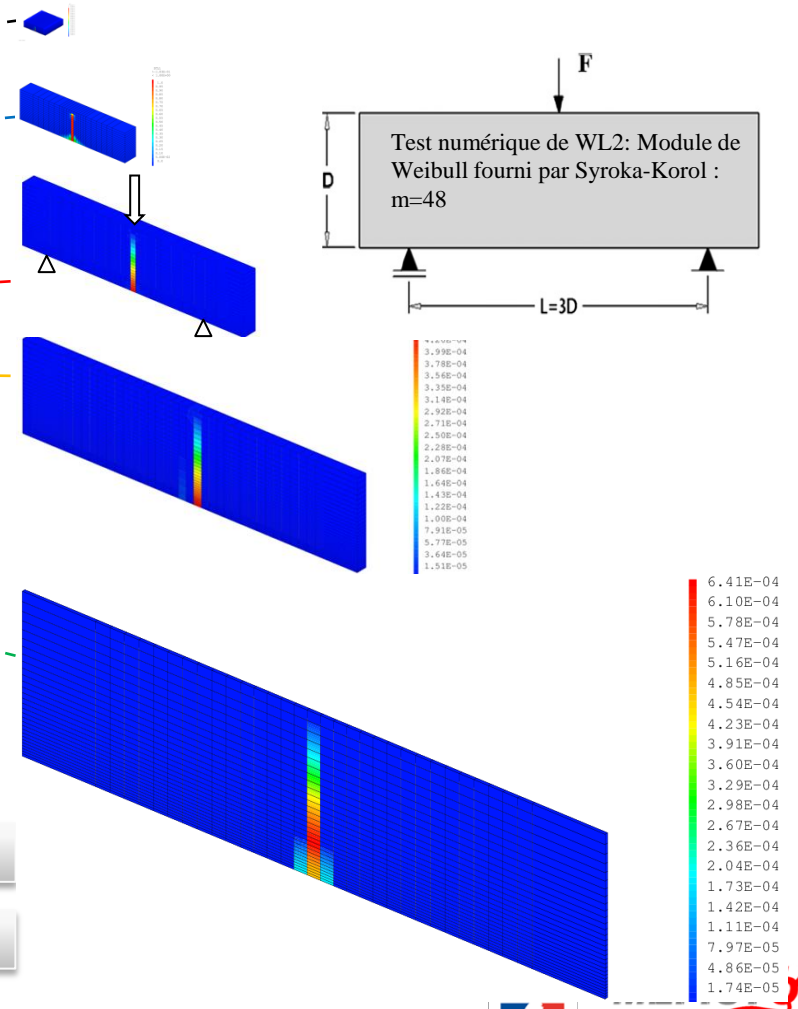
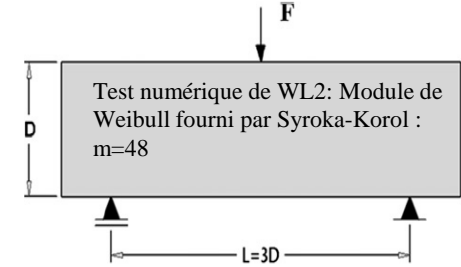
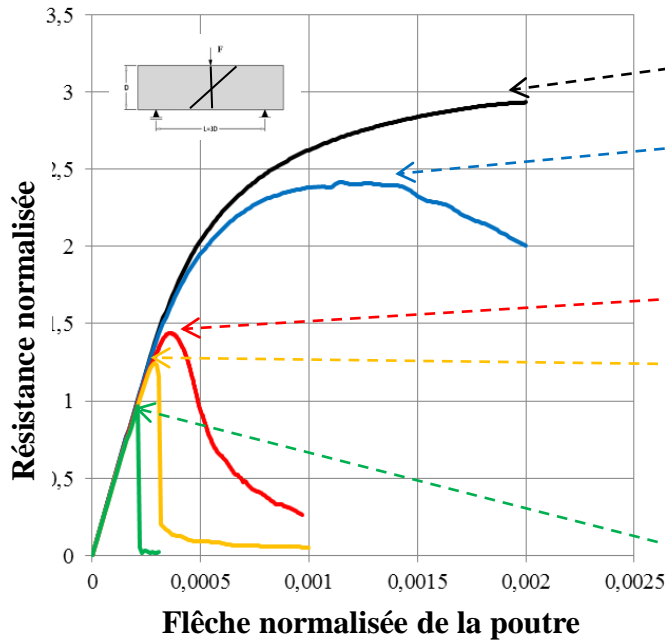
Ouverture de fissure



- En fin de calcul la résistance a été déterminée à sa valeur de vraisemblance maximale uniquement dans la zone endommagée

**Aptitude la méthode WL2 à concilier les effets d'échelle probabiliste et déterministe: cas de la poutre de Syroka-Korol (m=48)**

- Données issues de calculs méso : Syroka-Korol et al 2012)
- Données expérimentales : Gregoire et al 2013, Rojas Solano et al 2013

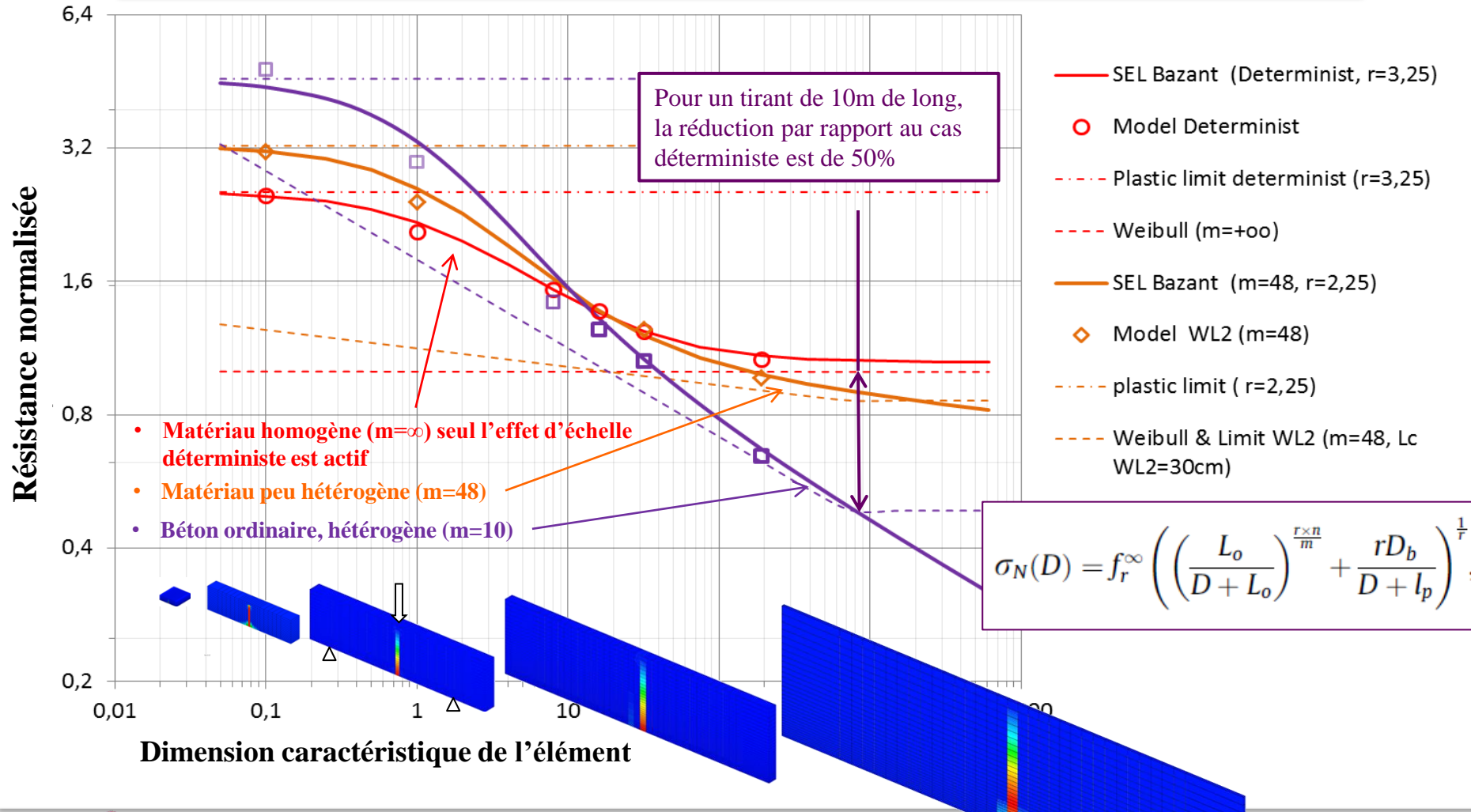


**Résistance à la traction par flexion normalisée déduite des simulations pour des poutres de hauteurs comprises entre 1 mm et 1.92m**

WL2 prévoit une réduction significative de la résistance à la traction normalisée

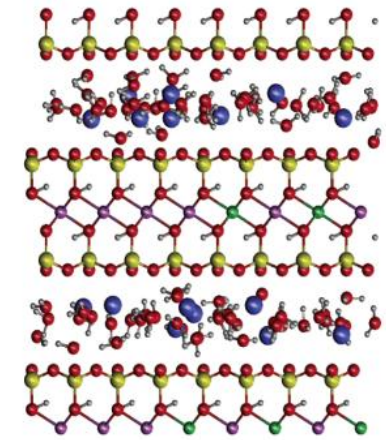
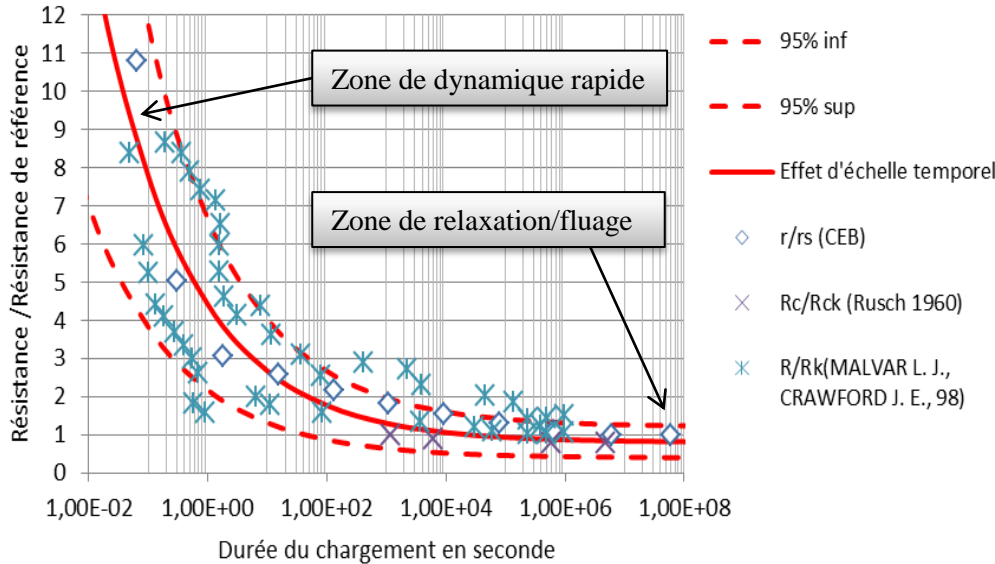
Cette prédiction est elle réaliste ? Incline t-elle les deux effets d'échelle ?

Prediction des effets d'échelle par WL2 pour différente hétérogénéités de matériau (m différents)



Pour des matériaux hétérogènes tels que le béton, l'effet d'échelle probabiliste ne peut pas être négligé, WL2 permet de considérer automatiquement ce second effet d'échelle et de traiter sa complémentarité avec l'effet d'échelle énergétique.

Couplage avec l'effet d'échelle temporel



$$\frac{R_{Vref,teq} - R_{seuil}}{R_{Vref,tref} - R_{seuil}} = \left( \frac{t_{ref}}{t_{eq}} \right)^{1/kt}$$

$$P_{Vref,tref}^s(M, \tau) = \exp \left[ - \frac{\left( (\sigma(M, \tau) - R_{seuil})^+ \right)^{k_t}}{\lambda_t R_{Vref,tref}} \right] \beta_{Vref,tref}^t(M, \tau)$$

$$t_{eq}(M, t), \beta_{Vref,tref}^t(M, t) = \int_0^t \beta_{Vref,tref}^t(M, \tau) d\tau$$

$$\frac{\partial \alpha_{Vref}^t}{\partial t} = \beta_{Vref,tref}^t(M, \tau)$$



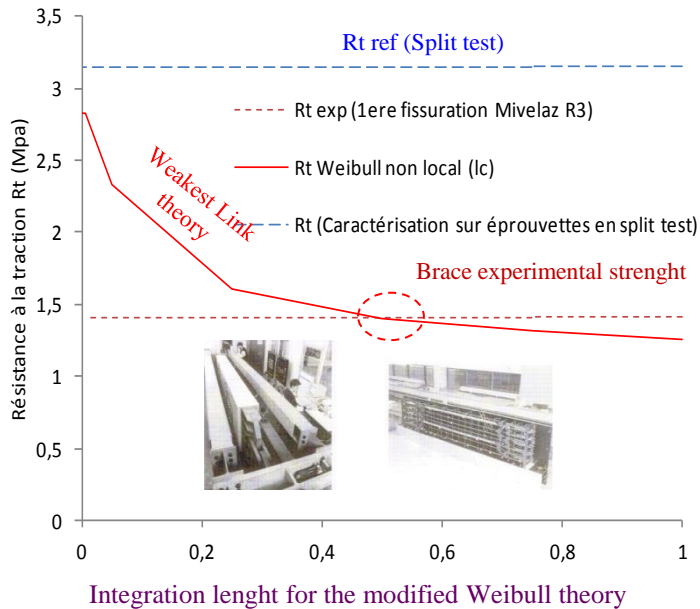
- Les effets de vitesses et de durée de chargement sont interprétés comme les conséquences d'un aléas temporel
- L'aléas temporel peut lui aussi être modélisé par un équation différentielle simple gérant les transitions d'état
- l'adjonction d'une variable interne suffit pour traiter ce problème numériquement





### Conclusion

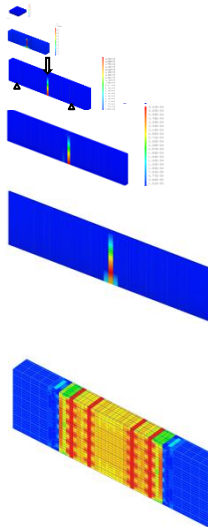
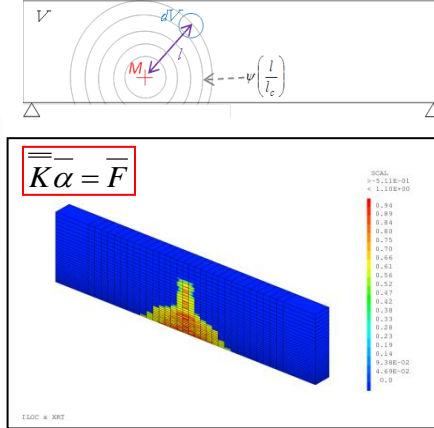
- Nécessité de coupler aspects énergétique et probabiliste des effets d'échelle



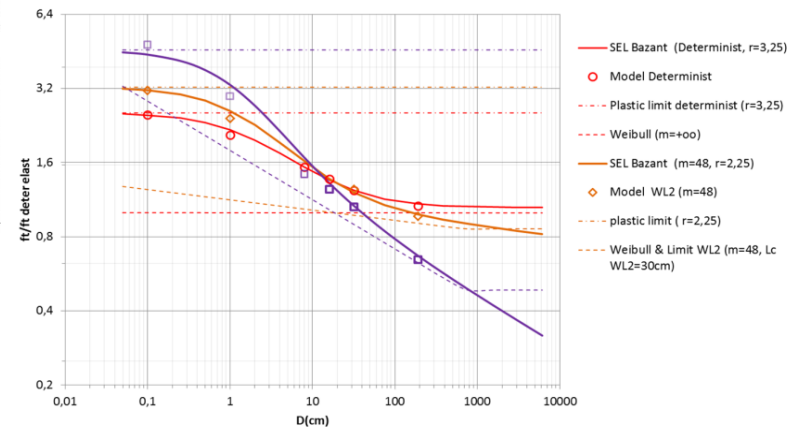
- Nécessité de limiter le domaine d'intégration de Weibull pour ne pas sous-estimer la résistance des éléments de grande dimension

- La méthode WL2 combinée à une méthode de contrôle de l'énergie permet de gagner du temps en évitant les méthodes de Monte Carlo
- Elle permet d'accéder directement au comportement le plus vraisemblable

- Une fonction poids permet de limiter le domaine d'intégration de Weibull
- Une équation différentielle d'Helmholtz est une approximation admissible pour évaluer le volume équivalent
- La méthode est appliquée à chaque itération que dans la zone encore « non-endommagée »



- WL2 permet de concilier les aspect probabilistes et énergétique [Syroka-Korol et al 2013]
- Les résultats s'accordent avec l'ensemble des phénomènes identifiée par Bazant pour établir sa loi générale d'effet d'échelle





**Dépendances spatio-temporelles de la résistance des matériaux.**  
Modélisation pour une prise en compte systématique  
en contexte de calcul non linéaire



Université  
de Toulouse



Merci pour votre attention

**Sellier Alain, Millard Alain**

