8èmes Journées Fiabilité des MATÉRIAUX & DES STRUCTURES

Aix-en-Provence,
9 et 10 avril 2014

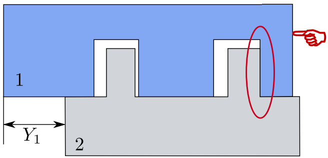
Calcul de probabilités de défaillance de mécanismes hyperstatiques avec une méthode de fiabilité système

A. Dumas, N. Gayton, J.-Y. Dantan

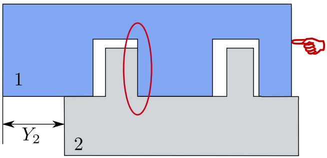
Plan

Introduction

- En production de masse, le process de fabrication n'est pas capable d'avoir une parfaite répétabilité des dimensions : écarts géométriques.
- Le comportement du mécanisme est perturbé par les écarts géométriques et par les jeux entre les pièces.



Configuration 1

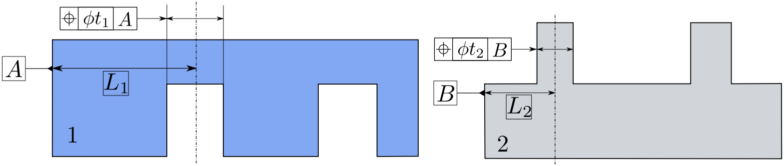


Configuration 2

Introduction

Des tolérances sont spécifiées sur des composantes particulières afin de limiter les écarts :

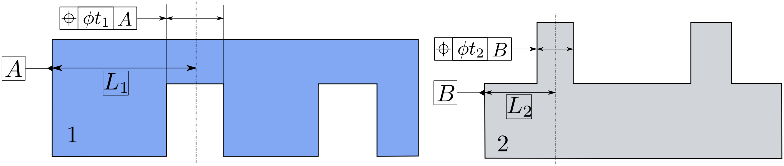
- Tolérances dimensionnelles,
- Spécifications géométriques (forme, orientation, position).



Introduction

Des tolérances sont spécifiées sur des composantes particulières afin de limiter les écarts :

- Tolérances dimensionnelles,
- Spécifications géométriques (forme, orientation, position).



L'analyse des tolérances, en gestion des incertitudes, a pour but de :

- Analyser l'impact des écarts géométriques sur le comportement du produit.
- Vérifier que les tolérances spécifiées permettent d'assurer l'assemblage et le bon fonctionnement du mécanisme.

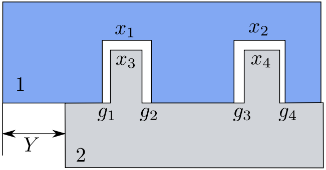
Formulation

Modélisation géométrique

- Ecarts géométriques $\mathbf{X}$: variables aléatoires de lois connues.
- Jeux $\mathbf{g}$: variables libres dépendant de la configuration des pièces.

Définition du problème fonctionnel $\equiv$ problème de fiabilité

- Vérifier si une caractéristique fonctionnelle Y ne dépasse pas sa valeur seuil Y_{th} : $C_f(\mathbf{X},\mathbf{g}) = Y_{th} - Y(\mathbf{X},\mathbf{g}) \geq 0$
- Calculer $P_f = \mathrm{Prob}(C_f(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0)$



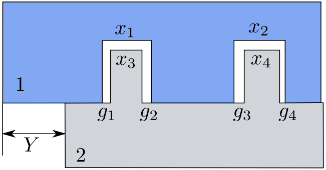
Formulation

Modélisation géométrique

- Ecarts géométriques $\mathbf{X}$: variables aléatoires de lois connues.
- Jeux $\mathbf{g}$: variables libres dépendant de la configuration des pièces.

Définition du problème fonctionnel $\equiv$ problème de fiabilité

- Vérifier si une caractéristique fonctionnelle Y ne dépasse pas sa valeur seuil Y_{th} : $C_f(\mathbf{X},\mathbf{g}) = Y_{th} - Y(\mathbf{X},\mathbf{g}) \geq 0$
- Calculer $P_f = \text{Prob}(C_f(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0)$



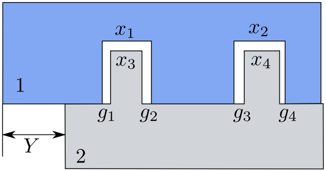
Quelle configuration du mécanisme choisir ?

Gestion des jeux du mécanisme

Calcul de la probabilité de défaillance

$P_f = \text{Prob}(C_f(\mathbf{X}, \mathbf{g})) \leq 0 = \text{Prob}(Y_{th} - Y(\mathbf{X}, \mathbf{g}) \leq 0)$

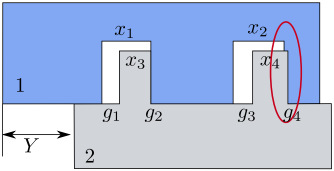
- Le pire des cas de C_f doit être trouvé : pire configuration des jeux pour des dimensions données.
- Sous contraintes de non interpénétration d'une surface dans une autre : $\{C(\mathbf{X}, \mathbf{g}) \leq 0\}$.



Gestion des jeux du mécanisme

Calcul de la probabilité de défaillance
$P_f = \mathrm{Prob}(C_f(\mathbf{X},\mathbf{g})) \leq 0 = \mathrm{Prob}(Y_{th} - Y(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0)$

- Le pire des cas de C_f doit être trouvé : pire configuration des jeux pour des dimensions données.
- Sous contraintes de non interpénétration d'une surface dans une autre : $\{C(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0\}$.

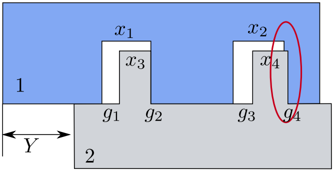


X Contact à gauche mais avec interpénétration à droite.

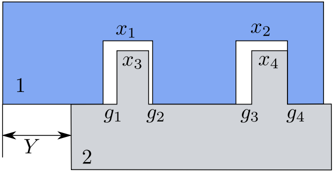
Gestion des jeux du mécanisme

Calcul de la probabilité de défaillance
$P_f = \text{Prob}(C_f(\mathbf{X},\mathbf{g})) \leq 0 = \text{Prob}(Y_{th} - Y(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0)$

- Le pire des cas de C_f doit être trouvé : pire configuration des jeux pour des dimensions données.
- Sous contraintes de non interpénétration d'une surface dans une autre : $\{C(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0\}$.



✗ Contact à gauche mais avec interpénétration à droite.



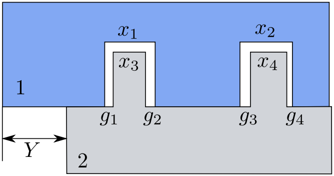
✓ Contact à droite sans interpénétration.

Formulation classique

Méthode d'analyse

- Trouver le pire des cas : minimisation de la condition fonctionnelle.
- Eviter les interpénétrations : sous contraintes $\{C(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0\}$.

$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0 \\ \text{sous}\{C(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0\} \end{array}\right)$$



$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{g}} & Y_{th} - Y(\mathbf{X},\mathbf{g}) \leq 0 \\ \text{sous} & C_1(\mathbf{X},\mathbf{g}) = -g_1 \leq 0 \\ & C_2(\mathbf{X},\mathbf{g}) = -g_2 \leq 0 \\ & C_3(\mathbf{X},\mathbf{g}) = -g_3 \leq 0 \\ & C_4(\mathbf{X},\mathbf{g}) = -g_4 \leq 0 \end{array}\right)$$

Méthode de résolution basée sur la simulation de Monte Carlo

$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g}) \leq 0 \\ \text{sous}\{C(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g}) \leq 0\} \end{array} \right)$$

1. Tirage de N réalisations des variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$,
2. Recherche du pire des cas : $\min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g})$ sous contraintes,
3. Estimation de la probabilité de défaillance : $\tilde{P}_f = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} I_D(\mathbf{x}^{(i)})$

Méthode de résolution basée sur la simulation de Monte Carlo

$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g}) \leq 0 \\ \text{sous}\{C(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g}) \leq 0\} \end{array} \right)$$

1. Tirage de N réalisations des variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$,
2. Recherche du pire des cas : $\min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g})$ sous contraintes,
3. Estimation de la probabilité de défaillance : $\tilde{P}_f = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} I_D(\mathbf{x}^{(i)})$

Difficulté :

- Temps de calcul très long pour des systèmes complexes.

Méthode de résolution basée sur la simulation de Monte Carlo

$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g}) \leq 0 \\ \text{sous}\{C(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g}) \leq 0\} \end{array} \right)$$

1. Tirage de N réalisations des variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$,
2. Recherche du pire des cas : $\min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{g})$ sous contraintes,
3. Estimation de la probabilité de défaillance : $\tilde{P}_f = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} I_D(\mathbf{x}^{(i)})$

Difficulté :

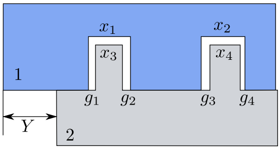
- Temps de calcul très long pour des systèmes complexes.

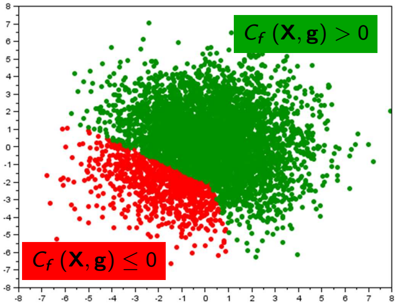
Solution :

- Transformer le problème classique en un problème de fiabilité système.

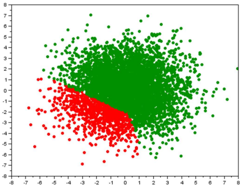
Cas particuliers des mécanismes hyperstatiques

- Fonction état-limite définie par morceaux.
- Aucune connaissance *a priori* de chaque fonction de performance associée aux état-limites.

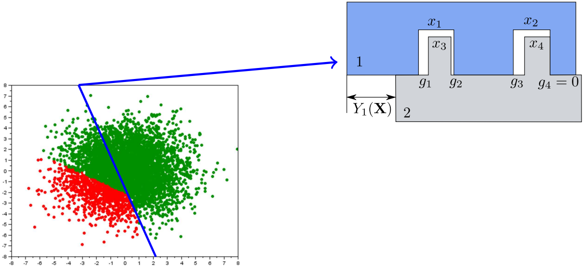




Décomposition par configuration



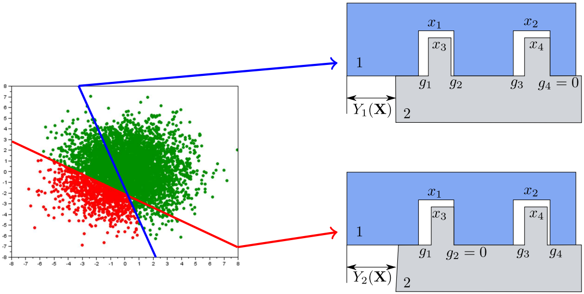
Décomposition par configuration



Configuration 1 :

$$C_{f1}(\mathbf{X}) = Y_{th} - Y_1(\mathbf{X})$$

Décomposition par configuration



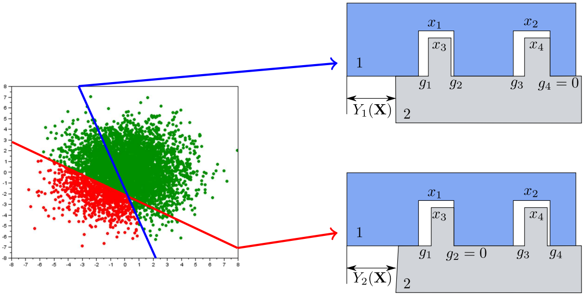
Configuration 1 :

$$C_{f1}(\mathbf{X}) = Y_{th} - Y_1(\mathbf{X})$$

Configuration 2 :

$$C_{f2}(\mathbf{X}) = Y_{th} - Y_2(\mathbf{X})$$

Décomposition par configuration



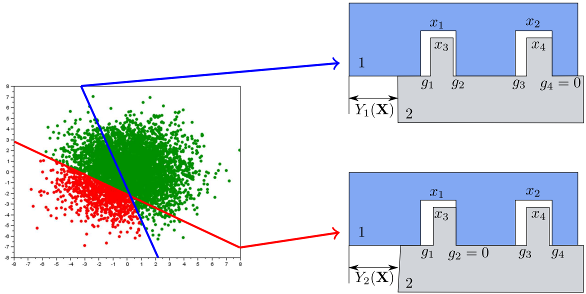
Configuration 1 :
$C_{f1}(\mathbf{X}) = Y_{th} - Y_1(\mathbf{X})$

Configuration 2 :
$C_{f2}(\mathbf{X}) = Y_{th} - Y_2(\mathbf{X})$

Développement d'une formulation système

- Une configuration des jeux = une valeur spécifique des jeux.
- La probabilité de défaillance est l'intersection des zones de défaillance dans les principales configurations : $P_f = \text{Prob}\left(C_{f1}(\mathbf{X}) \leq 0 \cap C_{f2}(\mathbf{X}) \leq 0\right)$

Décomposition par configuration



Configuration 1 :
$C_{f1}(\mathbf{X}) = Y_{th} - Y_1(\mathbf{X})$

Configuration 2 :
$C_{f2}(\mathbf{X}) = Y_{th} - Y_2(\mathbf{X})$

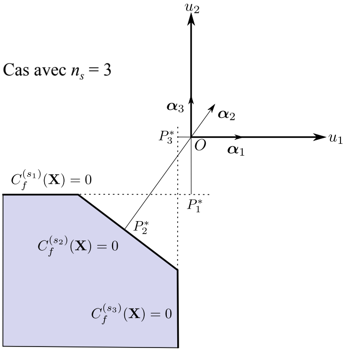
Développement d'une formulation système

- Une configuration des jeux = une valeur spécifique des jeux.
- La probabilité de défaillance est l'intersection des zones de défaillance dans les principales configurations : $P_f = \text{Prob}\left(C_{f1}(\mathbf{X}) \leq 0 \cap C_{f2}(\mathbf{X}) \leq 0\right)$

$$P_f = \text{Prob}\left(\bigcap_{j=1}^{n_s} C_{fj}(\mathbf{X}) \leq 0\right)$$

avec n_s le nombre de configurations.

Méthode de résolution système : FORM / FORM système



Calcul FORM pour chaque condition fonctionnelle $C_f^{(s_j)}$

- Etat-limite : $C_f^{(s_j)}(\mathbf{X}) = 0$
- Point de défaillance le plus probable : P_j^*
- Indice de fiabilité : β_j
- Cosinus directeur : $\boldsymbol{\alpha}^{(j)}$

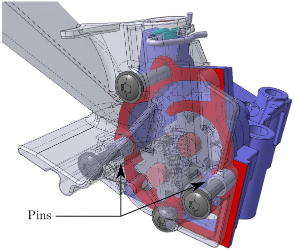
Matrice de corrélation :
$\rho_{jk} = \left\langle \boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \right\rangle$

FORM système

$$P_f = \text{Prob}\left(\bigcap_{s=1}^{n_s} C_f^{(s_j)}(\mathbf{X}) \leq 0 \right) = \Phi_{n_s}\left(-\boldsymbol{\beta}; [\boldsymbol{\rho}]\right)$$

avec Φ_{n_s}, la loi de répartition multinormale, calculée numériquement.

Mécanisme hyperstatique modélisé en 3D



Problème fonctionnel

Le positionnement du carter sur le bâti via les 2 goupilles doit être suffisamment précis pour garantir le bon fonctionnement de l'engrenage.

Caractéristiques

- 38 écarts géométriques = variables aléatoires $\mathbf{X}$,
- 3 jeux = paramètres d'optimisation $\mathbf{g}$,
- 160 contraintes d'interface $C(\mathbf{X}, \mathbf{g}) \leq 0$ (après linéarisation)
- 1 condition fonctionnelle $C_f(\mathbf{X}, \mathbf{g}) \geq 0$

Comparaison des résultats avec la méthode de Monte Carlo

Résultats numériques avec 3 ordres de grandeur de la probabilité de défaillance :

	Monte Carlo	FORM système
P_f (x10^{-6})	20453 2550 63.5	20283 2464 62.3
95% C.I.	1030 116 10	171 37 1
$N_{\text{appel optim.}}$ / n_s	3e5 3e6 1e7	89 95 120
Temps de calcul	28 min 4.3 h 14.7 h	2 min 2.5 min 3.8 min

Comparaison des résultats avec la méthode de Monte Carlo

Résultats numériques avec 3 ordres de grandeur de la probabilité de défaillance :

	Monte Carlo	FORM système
P_f (x10^{-6})	20453 2550 63.5	20283 2464 62.3
95% C.I.	1030 116 10	171 37 1
$N_{\text{appel optim.}}$ / n_s	3e5 3e6 1e7	89 95 120
Temps de calcul	28 min 4.3 h 14.7 h	2 min 2.5 min 3.8 min

Conclusion

- Méthode qui s'affranchit du problème d'optimisation.
- Application adaptée aux mécanismes très complexe où Monte Carlo n'est pas envisageable.

Merci de votre attention

Transformation du problème d'optimisation grâce à la dualité de Lagrange

Hypothèses

- La condition fonctionnelle est linéaire.
- Toutes les contraintes d'interface sont linéaires (ou linéarisées).

Equivalence entre les formulations

$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X},\mathbf{g}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{g} + c_0 \leq 0 \\ \text{sous} \quad C_i(\mathbf{X},\mathbf{g}) = \mathbf{d}_i^T\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^T\mathbf{g} + c_i \leq 0 \end{array} \right)$$

avec $i = 1, \ldots, p$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$ et $p >> m$.

$$\Leftrightarrow$$

$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{c} \max\limits_{\boldsymbol{\lambda}} C_{f,dual}(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = \left(\mathbf{d}_j^T\mathbf{x} + \mathbf{c}\right)^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{a}^T\mathbf{x} + c_0 \leq 0 \\ \text{with} \quad \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{e}_j = \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{array} \right)$$

Illustration sur un exemple simple

Exemple d'illustration avec 2 variables

$$P_f = \text{Prob}\left(\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{g}} C_f(\mathbf{X},\mathbf{g}) = g_1 + g_2 + x_1 + x_2 + 1 \leq 0 & \\ \quad \text{sous} \quad C_1(\mathbf{X},\mathbf{g}) = x_1 - g_1 - 1 \leq 0 & \\ \qquad\qquad\;\; C_2(\mathbf{X},\mathbf{g}) = x_2 - g_2 + 2 \leq 0 & \\ \qquad\qquad\;\; C_3(\mathbf{X},\mathbf{g}) = x_1 - x_2 - 2g_1 \leq 0 & \\ \qquad\qquad\;\; C_4(\mathbf{X},\mathbf{g}) = 2x_1 + x_2 + g_1 - 2g_2 \leq 0 & \end{array}\right)$$

Nouvelle formulation avec l'intersection

Il y a 4 configurations admissibles, ce qui donne :

$$P_f = \text{Prob}\left(C_f^{s_1}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_f^{s_3}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_f^{s_4}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_f^{s_6}(\mathbf{X}) \leq 0\right)$$

s_1 : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ | $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 1$ | $C_{f-Dual}^{s_1} = 4x_1 + x_2 + 1 = C_f^{s_1}$

s_2 : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$ | $\lambda_4 = -1$, $\lambda_2 = 4$ | n'est pas un optimum

s_3 : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_4 = 0$ | $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1/2$ | $C_{f-Dual}^{s_3} = \frac{3x_1 + 5x_2}{2} + 5 = C_f^{s_3}$

s_4 : $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ | $\lambda_1 = 2$, $\lambda_4 = 1$ | $C_{f-Dual}^{s_4} = 5x_1 + 2x_2 - 1 = C_f^{s_4}$

s_5 : $\lambda_2 = 0$, $\lambda_4 = 0$ | $(1) \Rightarrow 2 - \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0$, $\Rightarrow 2 = 0$ | impossible

s_6 : $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$ | $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ | $C_{f-Dual}^{s_6} = 2x_1 + 3x_2 + 4 = C_f^{s_6}$

Formulation système basée sur l'intersection d'événements

Equivalence entre max et intersection

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob}\left(\max\left[C_f^{s_1}, C_f^{s_3}, C_f^{s_4}, C_f^{s_6}\right] \leq 0\right) \\ &= \text{Prob}\left(\left[C_f^{s_1} \leq 0 \bigcap C_f^{s_3} \leq 0 \bigcap C_f^{s_4} \leq 0 \bigcap C_f^{s_6} \leq 0\right]\right) \end{aligned}$$

Formulation système basée sur l'intersection d'événements

Equivalence entre max et intersection

$$
\begin{aligned}
P_f &= \mathrm{Prob}\left(\max\left[C_f^{s_1}, C_f^{s_3}, C_f^{s_4}, C_f^{s_6}\right] \leq 0\right) \\
&= \mathrm{Prob}\left(\left[C_f^{s_1} \leq 0 \bigcap C_f^{s_3} \leq 0 \bigcap C_f^{s_4} \leq 0 \bigcap C_f^{s_6} \leq 0\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
P_f = \mathrm{Prob}\left(\bigcap_{j=1}^{n_s} C_f^{(s_j)}(\mathbf{X}) \leq 0\right)
$$